

## INTERAKTYWNE WSPOMAGANIE WYBORU DECYZJI W WARUNKACH RYZYKA

ANDRZEJ ŁODZIŃSKI

*Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego*

**STRESZCZENIE.** W pracy przedstawiono metodę interaktywnego wspomaganie decydenta w podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka. Ze zjawiskiem podejmowania decyzji w warunkach ryzyka mamy do czynienia wtedy, gdy wynik podjętej decyzji nie jest jednoznaczny i zależy od stanu otoczenia. Proces decyzyjny modeluje się przy pomocy optymalizacji wielokryterialnej. Metody optymalizacji wielokryterialnej nie dają jednego rozwiązania, ale cały zbiór rozwiązań. Metoda wyboru decyzji polega na interaktywnym prowadzeniu procesu podejmowania decyzji. Wybór decyzji dokonuje się przez rozwiązywanie problemu z parametrami sterującymi, które określają aspiracje decydenta, i ocenę otrzymywanych rozwiązań. Decydent zadaje parametr, dla którego wyznaczane jest rozwiązanie. Następnie ocenia otrzymane rozwiązanie akceptując je lub odrzucając. W drugim przypadku decydent podaje nową wartość parametru i problem jest rozwiązywany ponownie dla nowego parametru.

### 1. WPROWADZENIE

W pracy przedstawiono metodę interaktywnego wspomaganie decydenta w podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka. Ze zjawiskiem podejmowania decyzji w warunkach ryzyka mamy do czynienia wtedy, gdy wynik podjętej decyzji nie jest jednoznaczny i zależy od stanu otoczenia. Stany otoczenia mające wpływ na wynik decyzji nazywa się scenariuszami. Są to zdarzenia losowe, z których zrealizuje się tylko jedno. Powodowane są one przez czynniki niezależne od decydenta, a mające istotny wpływ na wynik decyzji. Dla scenariuszy dane są prawdopodobieństwa ich zajścia. Proces decyzyjny modeluje się przy pomocy optymalizacji wielokryterialnej. Metody optymalizacji wielokryterialnej nie dają jednego rozwiązania, ale cały zbiór rozwiązań. Metoda wyboru polega na interaktywnym prowadzeniu procesu podejmowania decyzji. Wybór decyzji dokonuje się przez rozwiązywanie problemu z parametrami sterującymi, które określają aspiracje decydenta, i ocenę otrzymywanych rozwiązań.

Decydent zadaje parametr, dla którego wyznaczane jest rozwiązanie. Następnie ocenia otrzymaną decyzję akceptując ją lub odrzucając. W drugim przypadku decydent podaje nową wartość parametru i problem jest rozwiązywany ponownie dla nowego parametru. Proces podejmowania decyzji nie jest procesem jednorazowym, ale iteracyjnym procesem

---

*Key words and phrases.* Optymalizacja wielokryterialna, rozwiązanie symetrycznie efektywne, funkcja skalaryzująca, wspomaganie podejmowania decyzji.

uczenia się decydenta o problemie decyzyjnym. Stosując ten sposób wyboru decyzji decydent może otrzymać taką decyzję, jaką chce, a nawet ją polepszyć. W sytuacji, gdy wybrany poziom aspiracji jest niemożliwy do osiągnięcia, wówczas poszukujemy sposobu najlepszego przybliżenia się do niego.

## 2. MODELOWANIE SYTUACJI DECYZYJNEJ W WARUNKACH RYZYKA

Podejmowanie decyzji jest to proces wyboru decyzji celem rozstrzygnięcia określonego problemu. Decyzją nazywamy wybór pomiędzy wieloma możliwościami, które nazywa się opcjami (wariantami) decyzyjnymi. Dokonywanie wyboru oznacza więc działania związane z wyborem jednej możliwości ze zbioru wielu możliwości, gdzie sam wybór jest zaledwie częścią podejmowania decyzji.

Problem decyzyjny opisuje się matematycznie wprowadzając zmienne decyzyjne  $x$  z pewnej przestrzeni decyzji  $X$ , której elementy jednoznacznie opisują podjęte decyzje. Zmienne decyzyjne nie mogą przyjmować dowolnych wartości. Występują ograniczenia na te zmienne wynikające na przykład z określonego zasobu surowców, ograniczonych nakładów finansowych czy możliwości technologicznych. Zmienne decyzyjne  $x$  powinny należeć do pewnego ustalonego zbioru decyzji dopuszczalnych  $X_0$ . Zbiór  $X_0$  nazywa się zbiorem decyzji dopuszczalnych, a należące do niego zmienne decyzyjne  $x \in X_0$  - zmiennymi dopuszczalnymi. W problemach decyzyjnych występują pewne miary jakości podejmowania decyzji. Matematycznie miarę jakości decyzji wyraża się za pomocą funkcji oceny, przy pomocy jednego lub wielu kryteriów.

Problem wyboru decyzji w warunkach ryzyka modeluje się wprowadzając do problemu wyboru decyzji scenariusze, które reprezentują możliwe stany otoczenia. Scenariusze powodowane są przez czynniki niezależne od decydenta, a mające istotny wpływ na wynik decyzji. Dla scenariuszy dany jest ich rozkład prawdopodobieństwa, tzn dane są scenariusze  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  i prawdopodobieństwa ich zajścia  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Jeżeli założy się, że prawdopodobieństwa  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  są liczbami wymiernymi, to można przez wielokrotne powtarzanie odpowiednich scenariuszy doprowadzić do sytuacji, gdzie prawdopodobieństwo każdego scenariusza jest takie samo [5], [6], [8], [9], [10].

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$x \in X_0$  - decyzja należąca do zbioru decyzji dopuszczalnych,  $X_0 \subset R^n$ ,

$S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  - scenariusze (stany otoczenia),

$p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  - prawdopodobieństwo wystąpienia  $i$ -tego scenariusza,

$y_i = f_i(x) = f(x, S_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  - wynik decyzji  $x$  przy zajściu scenariusza  $S_i$ ,

$f : X_0 \times Z \rightarrow Y$  - odwzorowanie decyzji w ich rezultaty, które zawiera też reprezentację niepewności,

$y = (y_1, \dots, y_m)$  wynik decyzji  $x$  należący do zbioru rezultatów osiągalnych,  $Y_0 \subset R^m$ .

Problem decyzyjny rozpatruje się jako zadanie optymalizacji wielokryterialnej:

$$(1) \quad \max_x \{(f_1(x), \dots, f_m(x)) : x \in X_0\},$$

gdzie:

$x \in X$  - wektor zmiennych decyzyjnych,

$f = (f_1, \dots, f_m)$  - funkcja wektorowa, która przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych  $x \in X_0$  wektor ocen  $y = f(x)$ ; poszczególne współrzędne  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  reprezentują skalarne funkcje ocen,

$X_0$  - zbiór decyzji dopuszczalnych.

Zadanie (1) polega na znalezieniu takiej decyzji dopuszczalnej  $x \in X_0$ , dla której  $m$  ocen przyjmuje jak najlepsze wartości.

Zadanie (1) rozpatruje się w przestrzeni ocen, tzn. rozpatruje się następujące zadanie:

$$(2) \quad \max_x \{(y_1, \dots, y_m) : y \in Y_0\},$$

gdzie:

$x \in X$  - wektor zmiennych decyzyjnych,

$y = (y_1, \dots, y_m)$  - wektorowy wskaźnik jakości; poszczególne współrzędne  $y_i, i = 1, \dots, m$  reprezentują pojedyncze, skalarne kryteria; wektor ocen  $y = (y_1, \dots, y_m)$  w problemie wielokryterialnym (2) reprezentuje wynik decyzji  $x$  w postaci loterii o  $m$  jednakowo prawdopodobnych  $p = \frac{1}{m}$  losach  $y_i, i = 1, \dots, m$ ,

$Y_0$  - zbiór dopuszczalnych wektorów ocen.

Funkcja wektorowa  $y = f(x)$  przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych  $x$  wektor ocen  $y \in Y_0$ , który mierzy jakość decyzji  $x$  z punktu widzenia ustalonego układu wskaźników jakości  $y_1, \dots, y_m$ . Obraz zbioru dopuszczalnego  $X_0$  dla funkcji  $y$  stanowi zbiór osiągalnych wektorów ocen  $Y_0$ .

### 3. ROZWIĄZANIE SYMETRYCZNIE EFEKTYWNE

W optymalizacji wielokryterialnej ważny jest nie cały zbiór  $Y_0$ , ale tylko jego odpowiednia część. Interesujące są nie wszystkie elementy zbioru  $Y_0$ , ale tylko pewne elementy wyselekcjonowane.

Rozwiązaniem problemu wyboru decyzji w warunkach ryzyka jest decyzja symetrycznie efektywna. Jest to decyzja efektywna, która spełnia dodatkową własność - własność anonimowości relacji preferencji.

Rezultaty niezdominowane (Pareto-optymalne) są definiowane w następujący sposób:

$$(3) \quad \hat{Y}_0 = \{\hat{y} \in Y_0 : (\hat{y} + \tilde{D} \cap Y_0 = \emptyset)\},$$

gdzie:

$\tilde{D} = D \setminus \{0\}$  - stożek dodatni bez wierzchołka. Jako stożek dodatni można przyjąć  $\tilde{D} = R_+^m$ .

Rezultaty niezdominowane to takie, w których nie można poprawić jednego wskaźnika jakości bez pogorszenia wskaźników pozostałych.

W problemie wielokryterialnym (1), który służy do wyboru decyzji w warunkach ryzyka przy danym zestawie funkcji oceny ważny jest tylko rozkład wartości osiągniętych przez te funkcje dla danej decyzji, a nie jest ważne, która funkcja jaką wartość przyjęła. Wymaganie to formuluje się jako własność anonimowości (bezstronności) relacji preferencji.

Relację preferencji nazywa się anonimową relacją preferencji wtedy, gdy dla każdego wektora ocen  $y = (y_1, \dots, y_m)$  i dla dowolnej permutacji  $P$  zbioru  $\{1, \dots, m\}$  zachodzi  $(y_{P(1)}, \dots, y_{P(m)}) = (y_1, \dots, y_m)$ .

Relację symetrycznej dominacji można wyrazić jako relację nierówności dla wektorów ocen, których współrzędne są uporządkowane niemalejąco. Relację tę można zapisać z użyciem przekształcenia  $T : R^m \rightarrow R^m$  porządkującego niemalejąco współrzędne wektorów ocen, czyli takiego, że  $T_1(y) \leq \dots \leq T_m(y)$ , oraz permutacji  $P$  zbioru  $\{1, \dots, m\}$  takiej, że  $T_i(y) = y_{P(i)}$  dla  $i = 1, \dots, m$ .

Wektor ocen  $\hat{y}$  nazywa się symetrycznie niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje  $y \in Y_0$  taki, że  $y$  dominuje symetrycznie  $\hat{y}$ .

Zbiór rezultatów symetrycznie niezdominowanych oznacza się  $\hat{Y}_{0S}$  [6], [8], [10], [11].

W przestrzeni decyzji określa się odpowiednie decyzje dopuszczalne. Decyzję  $\hat{x} \in X_0$  nazywa się decyzją symetrycznie efektywną, jeśli odpowiadający mu wektor ocen  $\hat{y} = f(\hat{x})$  jest wektorem symetrycznie niezdominowanym.

Rozwiązanie problemu decyzyjnego polega na wyznaczeniu dopuszczalnego wektora zmiennych decyzyjnych  $\hat{x}$ , dla którego odpowiadający mu wektor ocen  $\hat{y} = f(\hat{x})$  jest wektorem symetrycznie niezdominowanym. W przypadku niespójnej relacji preferencji różne maksymalne wektory ocen mogą być nieporównywalne.

#### 4. SKALARYZACJA PROBLEMU

Metodą wyznaczania poszczególnych decyzji symetrycznie efektywnych jest rozwiązywanie parametrycznej skalaryzacji zadania wielokryterialnego. Jest to zadanie optymalizacji jednokryterialnej specjalnie utworzonej funkcji skalaryzującej dwóch zmiennych - wskaźnika jakości  $y \in Y$  i parametru sterującego  $\bar{y} \in \Omega \subset R^m$  o wartości rzeczywistej tzn. funkcji  $s : Y \times \Omega \rightarrow R^1$ . Parametr  $\bar{y}$  jest w dyspozycji użytkownika, co umożliwia mu przeglądanie zbioru rozwiązań wielokryterialnych (2).

Aby wyznaczyć rozwiązanie symetrycznie efektywne zadania wielokryterialnego rozwiązuje się skalaryzację tego zadania z funkcją skalaryzującą  $s : Y \times \Omega \rightarrow R^1$ :

$$(4) \quad \max_{x \in X_0} \{s(f(x), \bar{y}) : x \in X_0\} = \max_{x \in X_0} \{s(y, \bar{y}) : x \in X_0\}.$$

Rozwiązanie optymalne zadania (4) powinno być rozwiązaniem zadania wielokryterialnego.

Funkcja skalaryzująca powinna charakteryzować się dwiema własnościami: własnością wystarczalności i własnością zupełności:

- własność wystarczalności - każdy punkt maksymalny takiej funkcji względem  $y$  jest zawarty w zbiorze  $\hat{Y}_{0S}$ , tzn.

$$(5) \quad \arg \max s(y, \bar{y}) \in \hat{Y}_{0S}, \quad y \in Y_0,$$

gdzie:  $\arg \max$  oznacza zbiór wszystkich punktów maksymalnych danej funkcji;

- własność zupełności - za pomocą odpowiednich zmian  $\bar{y}$  można osiągnąć dowolny rezultat  $\hat{y}$ , tzn. dla każdego  $\hat{y} \in \hat{Y}_{0S}$  istnieje takie  $\bar{y}$ , że:

$$(6) \quad \hat{y} \in \arg \max s(y, \bar{y}) \in \hat{Y}_{0S}, \quad y \in Y_0.$$

Funkcja skalaryzująca, mająca własność wystarczalności i własność zupełności, w pełni charakteryzuje rozwiązania symetrycznie efektywne. Każde maksimum takiej funkcji jest rozwiązaniem symetrycznie efektywne. Każde symetrycznie efektywne można osiągnąć przyjmując odpowiedni poziom aspiracji  $\bar{y}$  [6], [8], [11], [12].

Aby uzyskać takie rozwiązanie stosuje się specjalną funkcję skalaryzującą tzw. funkcję osiągnięcia zgodną z porządkiem. Funkcja ta ma następującą postać:

$$(7) \quad s(y, \bar{y}) = \min_{1 \leq i \leq m} (T_i(y) - T_i(\bar{y}_i)) + \varepsilon \sum_{i=1}^m (T_i(y) - T_i(\bar{y}_i)),$$

gdzie:

$y = (y_1, \dots, y_m)$  - wektorowy wskaźnik jakości; poszczególne współrzędne  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  reprezentują pojedyncze, skalarne kryteria,

$T(y) = (T_1(y), \dots, T_m(y))$ , gdzie  $T_1(y) \leq \dots \leq T_m(y)$  uporządkowany niemalejąco wektor ocen,

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$  - poziomy aspiracji dla poszczególnych kryteriów,  $i = 1, \dots, m$ ,

$T(\bar{y}) = (T_1(\bar{y}), \dots, T_m(\bar{y}))$ , gdzie  $T_1(\bar{y}) \leq \dots \leq T_m(\bar{y})$  uporządkowany niemalejąco wektorów poziomów aspiracji,

$\varepsilon$  - arbitralnie mały, dodatni parametr regularyzacyjny.

Funkcja ta mierzy osiągnięcie każdego celu. Maksymalizacja takiej funkcji, ze względu na  $y \in Y_0$ , wyznacza rozwiązanie symetrycznie efektywne  $\hat{y}$  i generującą ją decyzję symetrycznie efektywne  $\hat{x}$ . Wyznaczone rozwiązanie symetrycznie efektywne  $\hat{y}$  zależy od wartości poziomów aspiracji  $\bar{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  [7], [11], [12].

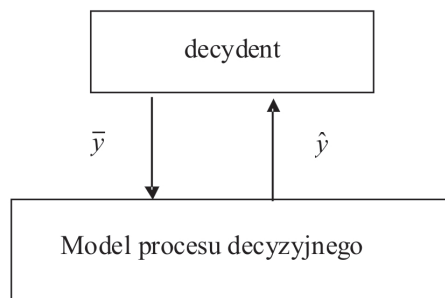
### 5. METODA WYBORU DECYZJI SYMETRYCZNIE EFEKTYWNYCH

W celu rozstrzygnięcia danego problemu decyzyjnego należy wybrać jedną decyzję do realizacji. Zbioru decyzji symetrycznie efektywnych nie można traktować jako ostatecznego rozwiązania problemu decyzyjnego. Ze względu na to, że rozwiązaniem zadania optymalizacji wielokryterialnej jest cały zbiór rozwiązań, decydent powinien dokonywać wyboru decyzji przy pomocy interaktywnego systemu komputerowego. System taki umożliwia sterowany przegląd zbioru rozwiązań.

Metoda wyboru decyzji jest metodą iteracyjną, polegającą na przemiennym wykonywaniu:

- obliczeń - dających kolejne rozwiązania symetrycznie efektywne;
- dialogu z decydem - będącym źródłem dodatkowej informacji o preferencjach decydenta.

Decydent, rozwiązując problem decyzyjny przy pomocy funkcji skalaryzującej (7), określa poziomy aspiracji, jako pożądane wartości poszczególnych kryteriów. Jeżeli wartości kryteriów nie osiągają poziomów aspiracji, to decydent stara się znaleźć rozwiązanie lepsze. Jeżeli wartości pewnych kryteriów osiągnęły odpowiednie poziomy aspiracji, to decydent koncentruje uwagę na poprawie wartości tych kryteriów, które nie osiągnęły swoich poziomów aspiracji. Gdy wszystkie kryteria osiągną założone poziomy aspiracji, to decydent jest zainteresowany dalszą poprawą kryteriów, o ile jest to możliwe [7], [11], [12]. Sposób podejmowania decyzji przedstawiony jest na rysunku 1.



RYSUNEK 1. Sposób podejmowania decyzji

Na początku procesu decyzyjnego decydent określa ogólnie swoje wymagania w postaci prostego modelu preferencji. Matematycznie oznacza to przyjęcie modelu preferencji

w postaci porządku częściowego - porządku Pareto i możliwością jego modyfikacji przez decydena w trakcie procesu decyzyjnego.

Proces podejmowania decyzji nie jest aktem jednorazowym, ale procesem iteracyjnym i dokonuje się w następujący sposób:

- a) użytkownik określa poziomy aspiracji  $\bar{y}$ ,  $i = 1, \dots, m$  dla poszczególnych rezultatów decyzji. Te poziomy aspiracji są określane adaptacyjnie w procesie uczenia się,
- b) wybór decyzji nie jest pojedynczym aktem optymalizacji, ale dynamicznym procesem poszukiwania rozwiązań, w trakcie którego użytkownik uczy się i może zmienić swoje preferencje,
- c) proces ten kończy się, gdy użytkownik znajdzie taką decyzję, która pozwala na osiągnięcie rezultatów spełniających jego aspiracje lub w pewnym sensie najbliższych do tych aspiracji.

Taki sposób podejmowania decyzji nie narzuca decydentowi żadnego sztywnego scenariusza analizy problemu decyzyjnego i dopuszcza możliwość modyfikacji jego preferencji w trakcie analizy problemu. W tym sposobie podejmowania decyzji użytkownik spełnia rolę nadrzędną. Komputer nie zastępuje użytkownika w podejmowaniu decyzji. Całym procesem podejmowania decyzji steruje użytkownik.

## 6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono metodę wyboru decyzji w warunkach ryzyka. Metoda nie zastępuje jednak decydena, który steruje całym procesem podejmowania decyzji.

## LITERATURA

- [1] A. Lewandowski and A. Wierzbicki A. eds., *Aspiration Based Decision Support Systems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1989.
- [2] A. Łodziński, *The use of reference objectives for selecting polyoptimal control in multistage process*, System Analysis Modelling Simulation. Vol. 8. Akademie Verlag Berlin 1991.
- [3] A. Łodziński, *Interaktywne wielokryterialne sterowanie procesem wieloetapowym*, Zeszyty Naukowe WSI w Łodzi, Teoria i Zastosowanie Informatyki Nr 2, 2003.
- [4] L. Keeney, H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives. Preferences and Value Tradeoffs*, 1993.
- [5] K. Kukula, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 2005.
- [6] D. Luce, H. Raiffa, *Gry i decyzje*, PWN, Warszawa 1966.
- [7] W. Ogryczak, *Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna*, Wydawnictwa UW, Warszawa 1997.
- [8] W. Ogryczak, *Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka*, preskrypt, 2007.
- [9] W. Sikora, *Badania operacyjne*, PWEW, Warszawa 2008.
- [10] T. Traskalik, *Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym*, PWE, Warszawa 2006.
- [11] A. Wierzbicki, N. Makowski, J. Wessels, *Model Based Decision Support Methodology with Environmental Applications*, IIASA Kluwer, Laxenburg Dordrecht 2000.
- [12] A. P. Wierzbicki, J. Granat, *Optymalizacja we Wspomaganiu Decyzji*, (maszynopis) 2003.

**INTERACTIVE AIDED DECISION CHOICE IN A RISK CONDITIONS**

ANDRZEJ ŁODZIŃSKI

ABSTRACT. The article presents a method of interactive aiding of decision-maker in the decision-making process in risk conditions. With a phenomena of decision-making in risk conditions we deal in a situation, when a result of making decision is not unequivocal and depends on an expected state. The decision-making process is modeled with the help of a multicriterial optimization. Methods of multicriterial optimization do not give a single solution, but an entire set of solutions. The method of decision-making is based on interactive leading the process of making decision. Choice of decision takes place by solving a problem with steering parameters, which inform about aspirations of decision-maker, and evaluation of received answers. The decision-maker sets a parameter, for which a solution is fixed. Next, he judges a received answer, accepting it or rejecting. In the second case the decision-maker gives a new value of a parameter and a problem is solved again for a new condition.