Scientific Bulletin of Chełm
Section of Mathematics and
Computer Science
No. 2/2006

SYMULACJE MONTE CARLO JAKO METODA WYCENY OPCJI

KATARZYNA ZIĘTEK-KWAŚNIEWSKA

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II

Streszczenie. W ostatnim czasie, wśród praktyków rynków finansowych dużą popularność zdobyła sobie nowa interdyscyplinarna dziedzina, określana jako *computational finance* (finanse obliczeniowe). Jedno z kluczowych zagadnień, na których skupia się to "hybrydowe" ujęcie, stanowi wycena instrumentów pochodnych, w tym, w szczególności, opcji.

Celem artykułu jest zaprezentowanie podejścia Monte Carlo, którego stosowanie w praktyce jest nierozerwalnie związane z wykorzystaniem komputerów. Artykuł rozpoczyna krótki przegląd dotyczący metod Monte Carlo, po którym dokonano ich zastosowania do wyceny opcji na akcje spółki niewypłacającej dywidendy. Następnie omówionych zostało kilka przykładów wykorzystania techniki Monte Carlo do wyceny opcji innych niż europejskie.

Ostatnim dekadom towarzyszył niezwykle dynamiczny rozwój techniki informatycznej z jednej i rynków finansowych z drugiej strony. Spektakularny postęp, jaki dokonał się w obszarze informatyki, nie mógł pozostać bez echa w sferze ekonomii. Na gruncie informatyki, statystyki i finansów wyłoniła się bowiem nowa dziedzina określana jako *"computational finance"* (finanse obliczeniowe). To hybrydowe ujęcie ukierunkowane jest na wykorzystanie zaawansowanej techniki dla takich potrzeb jak, chociażby, optymalizacja portfela czy zarządzanie ryzykiem.

W centrum zainteresowania finansów obliczeniowych znalazło się również zagadnienie wyceny instrumentów pochodnych, w tym w szczególności opcji. Od czasu opublikowania w 1973 roku przez F. Blacka i M. Scholesa przełomowego modelu wyceny tych derywatów, dalszy rozwój metod szacowania opcji przebiegał dwutorowo. Śledząc drzewo genealogiczne modeli wyceny opcji, wyodrębnić możemy metody nawiązujące bezpośrednio do modelu Blacka-Scholesa (wpisujące się w ród modeli analitycznych) oraz modele numeryczne[1]. W gronie tych ostatnich znajdują się symulacje Monte Carlo, których szerokie stosowanie stało się możliwe dzięki wykorzystaniu komputerów.

Celem artykułu jest zaprezentowanie metody Monte Carlo jako jednego z podejść do wyceny opcji. Pierwsza część artykułu ma charakter wprowadzający w tematykę metod Monte Carlo. Skoncentrowano się w niej zwłaszcza na przedstawieniu istoty omawianej techniki oraz jej podstawowych zastosowań. W części drugiej, wychodząc najpierw od pojęcia opcji, skupiono się na sposobie ich wyceny w oparciu o symulację Monte Carlo.

[1]W literaturze przedmiotu wyróżnia się jeszcze trzeci nurt modeli wyceny opcji - modele aproksymacji analitycznej - stanowiące złożenie wyżej wymienionych podejść; [17, s. 399].

Jako przykład wykorzystano europejską opcję kupna na akcje spółki niewypłacającej dywidendy. Następnie przedstawiono kilka przykładów zastosowania omawianej metody do wyceny opcji innych, niż standardowe europejskie opcje kupna i sprzedaży.

1. Metody Monte Carlo - wprowadzenie

1.1. **Metody Monte Carlo jako metody numeryczne.** Metody numeryczne określić można jako sztukę rozwiązywania zadań i naukę o rozwiązywaniu zadań; [18, s. 13]. Ten dział matematyki stosowanej może być wykorzystywany wszędzie tam, gdzie niemożliwe jest skorzystanie z podejścia analitycznego bądź też odwołanie się do niego byłoby zbyt skomplikowane. Z uwagi na złożoność problemów, przed którymi stają metody numeryczne, ich praktyczne stosowanie nierozerwalnie związane jest z wykorzystaniem komputerów i ich dużej mocy obliczeniowej.

Do typowych zagadnień, które obejmują swym zasięgiem metody numeryczne, należą między innymi: całkowanie numeryczne, rozwiązywanie układów równań liniowych, równań i układów równań nieliniowych, różniczkowych czy też wyznaczanie wartości i wektorów własnych[2]. Ta różnorodność zadań sprawia, że istnieje cały szereg rozmaitych metod numerycznych, wśród których znajdują się, dla przykładu: interpolacja liniowa i wielomianowa, metoda Eulera, metoda potęgowa, metoda eliminacji Gaussa, itd.

Do rodziny metod numerycznych należy również symulacja Monte Carlo. W przypadku tej metody zwraca uwagę jej uniwersalność wyrażająca się w możliwościach implementacji do rozwiązywania złożonych problemów z bardzo różnych dziedzin, np. techniki, fizyki, medycyny, ekonomii. Ponieważ w zależności od charakteru zadania, symulacja Monte Carlo przybiera inną postać, bardzo często mówi się nie tyle o metodzie, co o metodach Monte Carlo, podkreślając tym samych szeroki wachlarz ich zastosowań; [13, s. 12].

1.2. **Metody Monte Carlo - od "igły Buffona" po finanse.** Analizując metody Monte Carlo nie sposób nie odnieść się do tła historycznego towarzyszącego ich narodzinom. Zalążki metod Monte Carlo sięgają już bowiem XVIII wieku. Mowa tu o słynnym eksperymencie - tzw. igle Buffona. W 1733 roku francuski filozof, przyrodnik i matematyk Georges-Louis Leclerc, hrabia de Buffon sformułował następujący problem - ile wynosi prawdopodobieństwo, że igła upuszczona na płaszczyznę pokrytą równoległymi i położonymi w równych odstępach liniami przetnie którąś z nich. Tak określone zadanie sprowadzało się do oszacowania liczby π, a jego rozwiązanie, opublikowane przez Buffona w 1777 roku, wpisuje się do rodziny metod Monte Carlo.

Sięgając do korzeni tych metod bardziej nam współczesnych, należy cofnąć się do okresu II wojny światowej. Pewne podwaliny pod ich powstanie położyli J. Mauchly i P. Eckert, pracując nad maszyną o nazwie ENIAC (*Electronic Numerical Integrator And Computer*), zadaniem której miało być budowanie tablic artyleryjskich dla wojska amerykańskiego; [11, s. 150].

Najczęściej jednak metody Monte Carlo są kojarzone z nazwiskami J. von Neumanna, S. Ulama i N. Metropolisa, którzy, w ramach projektu "Manhattan" (program budowy bomby jądrowej), w Los Alamos przeprowadzali pierwsze na tak dużą skalę obliczenia wykorzystujące liczby losowe. Sama nazwa metody - Monte Carlo - została ukuta przez N. Metropolisa ([12, s. 127]) i nawiązuje oczywiście do stolicy Monako - miasta gry

[2]Szczegółowo na ten temat m.in. w [4] i [6].

i hazardu. Często podkreśla się tu również związek "ducha" metody z zainteresowaniem S. Ulama grą w pokera i stawianiem pasjansa; [12, s. 126].

Lata 50. przyniosły dynamiczny rozwój metod Monte Carlo, jednakże z uwagi na brak wydajnych elektronicznych maszyn cyfrowych ich stosowanie było znacznie ograniczone. Prawdziwy przełom w wykorzystaniu technik Monte Carlo nastąpił dopiero w latach 70. Obliczanie całek, rozwiązywanie równań liniowych i różniczkowych cząstkowych, generowanie liczb losowych czy szacowanie stałych matematycznych to tylko niektóre z zadań, do których zaczęto używać omawiane metody; [11, s. 151].

Szybko okazało się również, że rozważane techniki mogą być przydatne w dziedzinie finansów. Za prekursora zastosowania metod Monte Carlo dla tych celów uważa się D. B. Hertza, który w 1964 roku na łamach Harvard Bussiness Review wykorzystał symulację Monte Carlo w analizie ryzyka inwestycji, odwołując się do metody NPV (*net present value*)[3].

W kontekście inwestowania w opcje punktem zwrotnym stał się artykuł P. Boyle'a. W 1977 roku zapoczątkował on użycie metod Monte Carlo do wyceny europejskiej opcji kupna wystawionej na akcje spółki wypłacającej dywidendy. Jak sam po latach przyznał, jego praca okazała się być niezwykle użyteczna, gdyż umożliwiła radzenie sobie ze złożonymi problemami oraz przyczyniła się do tego, że komputery stały się wyjątkowo pomocnym narzędziem w nowoczesnym przemyśle finansowym; [1].

Obecnie metody Monte Carlo są szeroko wykorzystywane w finansach, w szczególności do takich zadań jak:

– szacowanie wartości zagrożonej (*Value-at-Risk*),
– badanie efektywności inwestycji,
– analiza opcji realnych,
– wycena obligacji i opcji wystawionych na obligacje,
– wycena opcji na akcje.

1.3. **Istota metod Monte Carlo.** Metody Monte Carlo znajdują zastosowanie zwłaszcza przy wyznaczania wielkości, które dają się przedstawić w postaci wartości oczekiwanych pewnych rozkładów prawdopodobieństwa; [19, s. 374]. Zasadnicze znaczenie w metodach Monte Carlo odgrywa losowanie, czyli wybór przypadkowy wielkości opisujących proces, przy czym losowanie odnosi się do znanych skądinąd rozkładów; [13, s. 12]. W praktyce korzysta się tu z komputerowych procedur generowania liczb pseudolosowych, tzn. takich liczb, które otrzymywane są według ściśle określonych formuł matematycznych, ale przypominają liczby prawdziwie losowe.

Otrzymany w drodze symulacji wynik jest jedynie wynikiem przybliżonym. Jednakże w wielu sytuacjach, gdy zastosowanie podejścia analitycznego jest niemożliwe bądź mogłoby się okazać zbyt czasochłonne, metody Monte Carlo są nieocenione.

Sam przebieg symulacji Monte Carlo można ująć w następujące etapy ([13, s. 15-16]):

1. Określenie rozkładów losowych wybranych zmiennych wejściowych.
   1.1 Wybór zmiennych opisywanych losowo.
   1.2 Określenie postaci rozkładu losowego.
2. Wybór zmiennych wyjściowych.
3. Przeprowadzenie jednego pełnego eksperymentu symulacyjnego.

[3]Szczegółowo na ten temat w [16, s. 284-292].

   3.1 Generowanie ciągów liczb losowych dla każdej (ciągłej i dyskretnej) zmiennej losowej.
   3.2 Wykorzystanie wygenerowanych liczb losowych do wyznaczenia wartości zmiennych losowych.
   3.3 Wprowadzenie zmiennych losowych do analitycznej postaci modelu.
   3.4 Wykonanie n powtórzeń.
4. Przeprowadzenie pełnego badania symulacyjnego, tj. wykonanie k eksperymentów, $k \geqslant 1$.
5. Analiza wyników.

2. Zastosowanie metod Monte Carlo do wyceny opcji

2.1. **Opcje - podstawy.** Opcja to jeden z podstawowych instrumentów pochodnych (derywatów), definiowany jako *"umowa zawarta między nabywcą (posiadaczem, ang. holder, buyer) kontraktu a jego sprzedawcą (wystawcą, ang. writer, seller), dająca nabywcy prawo, lecz nie stwarzająca zobowiązania, zakupu od wystawcy (lub sprzedaży wystawcy) określonej ilości wyspecyfikowanego instrumentu finansowego według z góry ustalonej ceny i w ciągu oznaczonego okresu lub w umówionym terminie"*; [3, s. 354-355][4]. Cechą wyróżniającą ten instrument pochodny od kontraktów *forward* lub *futures* jest to, że posiadacz opcji ma prawo wykonania określonej operacji, ale nie musi z niego korzystać.

Instrument będący przedmiotem kontraktu określa się mianem instrumentu pierwotnego, podstawowego bądź bazowego (*underlying instrument/asset*). Wśród finansowych instrumentów pierwotnych znajdują się m.in. akcje, indeksy, waluty, stopy procentowe czy kontrakty *futures*. Podstawowym elementem konstrukcyjnym kontraktu opcyjnego jest cena wykonania (realizacji, rozliczenia - *exercise price, strike price*), tzn. cena, po której ma nastąpić rozliczenie umowy. Termin, po którym opcja traci swą ważność, nazywany jest terminem wygaśnięcia lub zapadalności (*expiration date, maturity date*) i może on, choć nie musi, pokrywać się z terminem wykonania (realizacji - *exercise date*). W sytuacji, gdy powyższe terminy są zbieżne, tzn. opcja może być wykonana jedynie w dniu wygaśnięcia, mamy do czynienia z opcjami typu europejskiego. Natomiast, gdy opcja może być wykonana w dowolnym dniu swojej ważności, mówimy o opcjach amerykańskich.

Jak wynika z przytoczonej definicji, w zależności od charakteru uprawnienia, wyróżnia się dwa typy opcji - kupna (*call option*) i sprzedaży (*put option*). Oczywiście, nabycie prawa do kupna lub sprzedaży wiąże się z pewnym kosztem. W zamian za przywilej decydowania o realizacji kontraktu, nabywca płaci wystawcy kontraktu określoną cenę, zwaną premią. W tym miejscu dotykamy też problemu wyceny opcji.

2.2. **Wycena opcji w oparciu o metody Monte Carlo.** Zagadnienie wyceny opcji podejmowane było przez wielu naukowców. Warto wspomnieć tu o takich nazwiskach jak: C. M. Sprenkle, H. F. Ayres, P. A. Samuelson czy A. H. Chen. Milowym krokiem w zakresie szacowania wartości tych derywatów okazał się jednak, opublikowany w 1973 roku, model wyceny europejskiej opcji kupna akcji spółki niewypłacającej dywidendy autorstwa F. Blacka i M. Scholesa.

[4]Podana definicja dotyczy oczywiście opcji finansowej.

Ze względu na fakt, że opcje są instrumentem niejako "nabudowanym" na innych aktywach, parametrem krytycznym w ich wycenie jest "dokładny opis procesu stochastycznego kierującego zachowaniem instrumentu bazowego"; [2, s. 146]. Ponieważ w dalszej części rozważać będziemy przykład europejskiej opcji kupna na akcje spółki niewypłacającej dywidendy[5], w ich kontekście istotny jest sposób kształtowanie się cen akcji.

Jednym z najważniejszych procesów stochastycznych opisujących zachowanie się cen akcji, na którym też opiera się model Blacka-Scholesa, jest geometryczny ruch Browna wyrażający się wzorem:

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW(t), \tag{2.1}$$

gdzie:

S - cena akcji,
μ - dryf procesu ceny akcji (stopa wzrostu),
σ - zmienność ceny akcji,
t - czas,
$W(t)$ - proces Wienera (standardowy ruch Browna)[6].

Rozwiązaniem tego stochastycznego równania różniczkowego jest (w warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka[7]):

$$S(t) = S(0) \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z\right), \tag{2.2}$$

gdzie Z oznacza zmienną losową o rozkładzie $N(0,1)$, a r wolną od ryzyka stopę procentową.

Posiadacz europejskiej opcji kupna zdecyduje się na jej wykonanie, gdy w terminie wygaśnięcia cena akcji ($S(T)$) będzie wyższa od ceny wykonania (X). Jeśli powyższy warunek nie zostanie spełniony, tzn. $S(T) \leqslant X$, opcja wygasa niezrealizowana. Funkcję wypłaty dla tego typu opcji można więc przedstawić następująco:

$$(S(T) - X)^+ = max(0, S(T) - X). \tag{2.3}$$

Ponieważ cena opcji w chwili $t = 0$ jest równa wartości oczekiwanej zdyskontowanej wartości wypłaty, zatem konieczne jest oszacowanie wyrażenia postaci:

$$E[e^{-rT}(S(T) - X)^+]. \tag{2.4}$$

Powyższy problem można rozwiązać przy pomocy symulacji Monte Carlo. Punktem wyjścia wyceny opcji jest w tym przypadku wygenerowanie n możliwych cen instrumentu bazowego (akcji) w dniu wygaśnięcia opcji. Dla każdego ze scenariuszy kształtowania się ceny akcji należy wyznaczyć wartość wypłaty (zgodnie z (2.3)), a następnie dokonać ich dyskontowania według wolnej od ryzyka stopy procentowej. Procedurę wyznaczania przybliżonej wartości opcji kończy oszacowanie wartości oczekiwanej zdyskontowanych wypłat za pomocą średniej arytmetycznej.

[5]Posłużenie się przykładem europejskiej opcji kupna na akcje spółki niewypłacającej dywidendy służy jedynie zaprezentowaniu istoty omawianej metody. W praktyce, w przypadku gdy możliwe jest odwołanie się do dających dokładne wyniki analitycznych rozwiązań (np. model Blacka-Scholesa), nie ma potrzeby sięgania po metodę Monte Carlo.

[6]Dokładny opis standardowego ruchu Browna i jego własności w [19, s. 165-166].

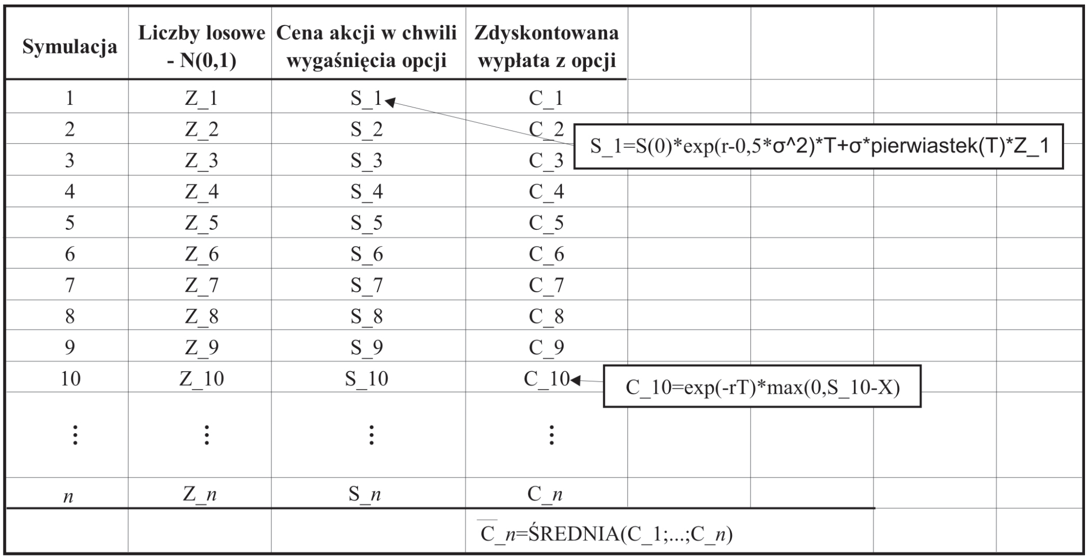
[7]Więcej na temat wyceny opcji w warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka w [7, s. 302-304].

Zaprezentowany mechanizm można zapisać za pomocą następującego algorytmu ([5, s. 5]):

dla $i = 1, 2, \ldots$

- wygeneruj $Z_i - N(0, 1)$,
- oszacuj $S_i(T) = S(0) \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} Z_i\right)$,
- oblicz wartości wewnętrzne: $(S_i(T) - X)^+$,
- zaktualizuj wypłaty z opcji: $C_i = e^{-rT}(S_i(T) - X)^+$,
- wyznacz średnią arytmetyczną z wyników poszczególnych symulacji: $\overline{C} = \frac{1}{n}(C_1 + ... + C_n)$.

Metodę Monte Carlo można w prosty sposób przedstawić w arkuszu kalkulacyjnym. Poniższy rysunek przedstawia schemat rozwiązania zgodny z zaprezentowanym algorytmem.



Rysunek 1. Wyznaczanie wartości oczekiwanej bieżącej wartości wypłaty z opcji kupna na akcje spółki niewypłacającej dywidendy w arkuszu kalkulacyjnym (Na podstawie [5, s. 6])

Problemem, który pojawia się przy korzystaniu z arkusza kalkulacyjnego, jest konieczność wygenerowania liczb losowych (pseudolosowych) z rozkładu normalnego standaryzowanego ($N(0, 1)$). Aby tego dokonać, należy wpierw wygenerować liczby losowe o rozkładzie równomiernym z przedziału $[0, 1]$ (funkcja LOS() w Excelu), a następnie uzyskane wyniki przekształcić w standaryzowany rozkład normalny. Można tego dokonać na kilka sposobów. Najprostszym rozwiązaniem jest odwrócenie dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego. W przypadku arkusza kalkulacyjnego Excel oznacza to odwołanie się do funkcji ROZKŁAD.NORMALNY.ODW(prawdopodobieństwo, średnia, odchylenie_std), czyli, w naszej sytuacji, do funkcji postaci ROZKŁAD.NORMALNY. ODW(LOS(),0, 1)[8]. Innym sposobem otrzymania wartości z rozkładu $N(0, 1)$ jest metoda Boxa-Mullera, w której dwie zmienne losowe o rozkładzie równomiernym na przedziale $[0, 1]$ są transformowane na zmienne o rozkładzie normalnym. Inaczej, dwie losowo

[8] W odniesieniu do tego typu rozwiązania zwraca się uwagę, że w przypadku wersji poprzedzających Excela XP, nie działało ono poprawnie.

niezależne liczby z rozkładu równomiernego na przedziale $[0,1]$ x_1 i x_2 można przekształcić na dwie losowo niezależne liczby z $N(0,1)$ z_1 i z_2 za pomocą następujących formuł:

$$z_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2), \tag{2.5}$$

$$z_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2). \tag{2.6}$$

Podobnie jak poprzednio, istnieje możliwość przełożenia powyższych formuł na język arkusza kalkulacyjnego.

Oczywiście zaprezentowany powyżej przykład wykorzystania arkusza kalkulacyjnego dla potrzeb symulacji Monte Carlo ma jedynie poglądowy charakter. Na rynku istnieje bowiem wiele bardziej zaawansowanych rozwiązań umożliwiających stosowanie omawianych technik. Mowa tu zarówno o komercyjnym (np. *Mathematica*, *Matlab*), jak i otwartym (*open-source*) oprogramowaniu (np. *Octave*) wspomagającym obliczenia oraz o bibliotekach numerycznych wyposażonych w funkcje znajdujące zastosowanie w finansach (np. *QuantLib*, *RiskQuantify*).

Podkreślając zalety metod Monte Carlo bardzo często wskazuje się na ich łatwość, czytelność oraz elastyczność. Niestety, ceną prostoty symulacji Monte Carlo jest to, że po pierwsze nie daje jednoznacznej wyceny, po drugie - otrzymany wynik jest obarczony błędem wyrażonym odchyleniem standardowym. Błąd oszacowania jest proporcjonalny do teoretycznego odchylenia standardowego wyniku jednego pełnego eksperymentu i odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z liczby symulacji; [19, s. 376]. Niemniej jednak, istnieją sposoby redukcji wariancji przekładające się na zwiększenie precyzji dokonywanych szacunków (np. metoda odbić lustrzanych - *antithetic variate method*).

2.3. **Symulacje Monte Carlo - sposób na "nieeuropejskie" opcje.** Metoda Monte Carlo okazuje się niezwykle użyteczna zwłaszcza, gdy istnieje potrzeba wyceny opcji innych niż europejskie. Warto odnieść się w tym miejscu do kilku przykładów.

Za pomocą metody Monte Carlo dokonać można wyceny arytmetycznej opcji azjatyckiej. W odróżnieniu od opcji typu europejskiego, dla których wypłata uzależniona jest od wartości instrumentu bazowego w chwili wygaśnięcia kontraktu, dochód z opcji azjatyckiej uwarunkowany jest średnią ceną instrumentu bazowego[9]. Zastosowanie symulacji Monte Carlo polega w tym przypadku na generowaniu średnich cen instrumentu bazowego, a następnie zdyskontowaniu wartości przeciętnej wypłaty przysługującej nabywcy opcji. Należy tu jednak pamiętać o pewnym ograniczeniu stosowanego podejścia. Jak wskazują wyniki badań, użycie metody Monte Carlo do opcji azjatyckich sprawdza się raczej w przypadku instrumentów bazowych wykazujących niewielką zmienność; [8, s. 141].

---

[9]W przypadku arytmetycznych opcji azjatyckich do wyznaczania średniej ceny instrumentu pierwotnego stosuje się średnią arytmetyczną. Obok nich występują również geometryczne opcje azjatyckie bazujące na średniej geometrycznej. Te ostatnie można jednak wycenić w oparciu o model Blacka-Scholesa; [14, s. 99].

Symulacja Monte Carlo znajduje również zastosowanie do wyceny innych opcji uwarunkowanych[10]. Wystarczy wspomnieć chociażby o opcjach wstecznych[11] czy barierowych[12].

Swoją popularność w zakresie wyceny opcji amerykańskich metoda Monte Carlo w dużej mierze zawdzięcza pracy F. A. Longstaffa i E. S. Schwartza. Jak zauważyli autorzy, szacowanie oraz wybranie optymalnego momentu wykonania opcji tego typu to jedno z większych wyzwań dziedziny instrumentów pochodnych, zwłaszcza gdy wartość opcji zdeterminowana jest przez więcej niż jeden czynnik; [10, s. 113]. W przypadku opcji amerykańskich posiadacz każdorazowo musi dokonywać wyboru - czy zrealizować opcję przed czasem, czy też przetrzymać ją do dnia wygaśnięcia. Aby podjąć optymalną decyzję, konieczne jest zatem porównywanie wypłat - należnej z tytułu natychmiastowej realizacji kontraktu, z oczekiwaną przyszłą wynikającą z przetrzymania opcji. Kluczową rolę odgrywa tu więc warunkowa wartość oczekiwana wypłaty, oszacowania której autorzy podejścia dokonują za pomocą symulacji w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów (LSM - *least squares Monte Carlo*); [10, s. 114]. Wykorzystując podejście LSM, F. A. Longstaff i E. S. Schwartz dokonali wyceny amerykańskiej opcji sprzedaży, amerykańskiej-bermudzkiej-azjatyckiej (*American-Bermuda-Asian*) opcji egzotycznej oraz amerykańskiej opcji wystawionej na instrumenty podlegające procesowi skoku-dyfuzji (*jump-diffusion proccess*).

Symulacja Monte Carlo okazuje się niezwykle użyteczna, gdy konieczne jest oszacowanie wartości opcji zależnych od więcej niż jednego instrumentu bazowego. Za przykład może tu posłużyć opcja koszykowa, w przypadku której instrumentem podstawowym jest koszyk dwóch lub więcej aktywów bazowych.

3. Podsumowanie

Obserwowany od przeszło trzech dekad dynamiczny rozwój rynku opcji z całą pewnością nie byłby możliwy, gdyby nie sformułowanie w 1973 roku przez F. Blacka i M. Scholesa modelu wyceny europejskich opcji kupna akcji. Choć uznawana za jedno z największych osiągnięć współczesnych finansów, nowa metoda szybko okazała się jednak niewystarczająca. Obok nurtu modeli analitycznych, do których wpisuje się wyżej wymienione rozwiązanie, zaczął się rozwijać nurt modeli numerycznych. Do tego ostatniego należy też metoda Monte Carlo.

Sedno zastosowania symulacji Monte Carlo w wycenie opcji polega na wyznaczeniu przyszłych cen instrumentu bazowego w oparciu o geometryczny ruch Browna, a następnie określeniu wartości oczekiwanej zdyskontowanych wypłat z opcji. Kluczową rolę odgrywa w tej kwestii proces generowania liczb losowych (właściwie pseudolosowych), przebiegający przy wsparciu ze strony komputerów.

[10]Opcje uwarunkowane, czyli *path dependent options*, są opcjami, w których dochód inwestora zależy nie tylko od ceny instrumentu bazowego osiągniętej w terminie wykonania, ale również od cen zanotowanych między momentem zawarcia transakcji, a momentem wykonania kontraktu opcyjnego; [9, s. 17].

[11]Opcje wsteczne oferują ich właścicielom prawo do otrzymania wypłaty, wysokość której jest uzależniona od minimalnej bądź maksymalnej wartości instrumentu bazowego zanotowanej w czasie ważności opcji; [14, s. 82].

[12]Opcje barierowe to opcje, których wykonanie zależy od tego, czy instrument bazowy osiągnie pewien ustalony poziom zwany barierą; [15, s. 51].

Dzięki zastosowaniu metody Monte Carlo możliwe jest oszacowanie wartości opcji o bardziej złożonej konstrukcji niż standardowe europejskie opcje kupna i sprzedaży. W szczególności omawiane techniki znajdują zastosowanie w wycenie opcji amerykańskich oraz bardziej zaawansowanych opcji egzotycznych, np. azjatyckich, barierowych, wstecznych czy koszykowych.

Niewątpliwie do zalet metod Monte Carlo należą: prostota, czytelność oraz elastyczność. Niestety, omawiane podejście, podobnie jak i inne, nie jest pozbawione wad. W odróżnieniu od modelu Blacka-Scholesa czy dwumianowego, które dają dokładny wynik, w przypadku symulacji Monte Carlo otrzymujemy jedynie wynik przybliżony. Co więcej, jest on obciążony błędem szacunku. Okazuje się jednak, że istnieją sposoby na zniwelowanie tych niedogodności, jak choćby różne techniki ograniczania wariancji.

Metodę Monte Carlo w prosty sposób można zaimplementować już w zwykłym arkuszu kalkulacyjnym, choć w przypadku dużej liczby symulacji nie jest to najlepsze rozwiązanie. Oprócz tego istnieje wiele komercyjnych, jak i otwartych (*open-source*) programów i bibliotek numerycznych (np. *QuantLib*, *RiskQuantify*), które z powodzeniem można wykorzystać dla potrzeb wyceny opcji przy użyciu techniki Monte Carlo.

Literatura

[1] R. Beuerlein, *An Interview with Dr. Phelim Boyle*, The Actuary Magazine, April/May 2006. Dostepne na stronie: www.soa.org.

[2] J. C. Cox, S. A. Ross, *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economics, Vol. 3, Issue 1–2, 1976, s. 145–166.

[3] W. Dębski, *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[4] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.

[5] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 53, Springer-Verlag, New York 2004.

[6] T. Guziak i in., *Metody numeryczne w elektrotechnice*, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 1998.

[7] J. Hull, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG PRESS, Warszawa 1997.

[8] M. Krawiec, *Zastosowanie instrumentów pochodnych do ograniczania ryzyka rynkowego*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2007.

[9] M. Kuźmierkiewicz, *Opcje uwarunkowane*, Bank i Kredyt, 6/1999, s. 17–32.

[10] F. A. Longstaff, E. S. Schwartz, *Valuing American options by simulation: a simple least squares approach*, Review of Financial Studies, Vol. 14, No. 1, 2001, s. 113–147.

[11] A. Majewska, *Zastosowanie metody Monte Carlo do wyceny opcji*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Nr 394, 2004, s. 149–158.

[12] N. Metropolis, *The beginning of the Monte Carlo Method*, Los Alamos Science, No. 15, 1987, s. 125–130.

[13] B. Mielczarek, *Metoda Monte Carlo w nauczaniu symulacji - niesłusznie pomijane podejście?* [w:] *Modelowanie symulacyjne systemów społecznych i gospodarczych I*, red. Balcerek A., Kwaśnicki W., Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej, Materiały i Studia, Vol. 80, Nr 22, 2006, s. 11–20.

[14] A. Napiórkowski, *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2002.

[15] I. Pruchnicka-Grabias, *Egzotyczne opcje finansowe. Systematyka, strategie, wycena*, CeDeWu, Warszawa 2009.

[16] W. Rogowski, *Rachunek efektywności przedsięwzięć inwestycyjnych*, Wolters Kluwer, Kraków 2008.

[17] Ch. W. Smithson, C. W. Smith Jr., W. D. Sykes, *Zarządzanie ryzykiem finansowym. Instrumenty pochodne, inżynieria finansowa i maksymalizacja wartości*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa 2000.

[18] A. Smoluk, *Podstawy metod numerycznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2002.

[19] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

THE MONTE CARLO SIMULATIONS AS A METHOD OF OPTION PRICING

KATARZYNA ZIĘTEK-KWAŚNIEWSKA

Abstract. In the recent past, the new interdisciplinary field named computational finance has gained great popularity among the practitioners of financial markets. One of the key problem this hybrid discipline focuses on is evaluation of derivatives, especially options.

The aim of the paper is to present the Monte Carlo approach, application of which, in practice, is inseparably connected with usage of computers. At the beginning, the article offers a short overview of the Monte Carlo methods. Once the Monte Carlo techniques are introduced, they are applied to an example of a European call option of a non-dividend paying stock. Next, a few examples of using Monte Carlo approach to value non-European options are discussed.